УДК 352.851

Кызалакова Аида, Торогельдиева К.М.
И.Арабаев атындагы КМУнун математика жана аны окутуунун технологиясы кафедрасынын магистранты,
И.Арабаев атындагы КМУ, профессор
Кызалакова Аида, Торогельдиева К.М.
магистрант кафедры математики и технологии ее обучения КГУ имени И.Арабаева,
КГУ имени И.Арабаева, профессор.
Aida Kizalakova, Torogeldieva K.M.
Master student of the Department of Mathematics and Technology of its Teaching I. Arabaev KSU
KSU named after I.Arabayev, professor.

МЕКТЕП КУРСУНДА КОМБИНАТОРИКАНЫ ОКУТУУНУН ЫКМАЛАРЫ

СПОСОБЫ ОБУЧЕНИЯ КОМБИНАТОРИКИ В ШКОЛЬНОМ КУРСЕ МАТЕМАТИКИ

WAYS TO LEARN COMBINATORICS IN A SCHOOL MATH COURSE

Аннотация: Макалада комбинаториканы окутуунун методикалык багыттары берилди. Колдонуу аймактары жана тарыхый маалыматтар берилди. Өз алдынча иштөөгө көнүгүүлөр сунушталды.

Аннотация: в статье даны методические аспекты обучения комбинаторики. Даны область применения комбинаторики и исторические материалы. Предложены упражнении для самостоятельной работы.

Annotation: the article gives methodical aspects of combinatorics training. The scope of the combinatorics and historical materials are given. Offered exercises for self-work.

Түйүндүү сөздөр: математика, комбинаторика, ыкмалар, 8-класс, орун алмаштыруу, орундаштыруу, топтоштуруу, тарыхый материалдар, өз алдынча иш.

Ключевые слова: математика, комбинаторика, способы, 8 класс, перестановка, размещение, сочетание, исторические материалы, самостоятельная работа.

Keywords: mathematics, combinatorics, ways, 8th grade, permutation, placement, combination, historical materials, independent work.

«Мектепте математикалык билим берүү окуучуларга жалаң гана базалык билимдерди бербестен, аларда жаңы маалыматтарды өз алдынча өздөштүрүү жөндөмдүүлүгүнүн жана интеллектуалдуу ийкемдүү ой-жүгүртүү компоненттеринин болушуна чоң көңүл буруу керек» [2,3-б.]. Жогорудагыларга байланыштуу математиканы окутууда, окуу маалыматтарын жаттоого эмес аны терең түшүнүүгө жана бул маалыматтарды практикада чыгармачылыкта пайдалануу билгичтиктерин калыптандырууга багыттоо талап кылынат.

1. Окутуунун жогорку эффективдүүлүгүнө жетишүү, эң башкы максаттардын бири болуп математикалык даярдыгын камсыз кылган окутуунун мазмунуна терең көңүл буруу;

2. Окуучулардын математикалык ой-жүгүртүүсүн калыптандырууга жана өнүктүрүүгө шарттарды түзүү.

3. Ишмердүүлүккө негизделген комплекстүү тапшырмаларды иштеп чыгуу, түшүнүктөрдү блоктор боюнча берүү.

4. Өз алдынча иштерди өнүктүрүү.

Ал үчүн окуу процессинде изденүүчү, тарыхый маалыматтарды, изилдөөчү проблемалык методдорду кеңири пайдалануу.

Бул маселелерди чечүүнүн негизги принциптери болуп, окуучулардын активдүүлүгүн жана өз алдынчалыгын жогорулатуу.

Комбинаторика түшүнүгү 8-класста алгебрада берилет [1]. Жаны түшүнүктү берүүдө комбинаторика илиминин негизделишине, математиканын бөлүгүн окутуунун максаттарына, колдонуу аймактарына токтолуу, тарыхый маалыматтарды берүүдө суроо-жооп, аңгемелешүү методдорун колдонуу максатка ылайык.

Көп учурларда чектүү сандагы элементтерден ар кандай комбинацияларды түзүүгө жана кандайдыр эреже боюнча түзүлгөн бардык мүмкүн болгон комбинациялардын (латын сөзү combinftio - биригүү) санын эсептөөгө туура келет. Мындай маселелер комбинатордук маселелер деп аталып, аларды чыгаруу менен иш жүргүзүүчү математиканын бөлүмү комбинаторика деп аталат.

Математиканын бул бөлүмү ыктымалдуулук теориясында, башкаруу системалар теориясында, кибернетикада, математикалык логикада жана башка илимдин жана техниканын көп бөлүктөрүндө маанилүү ролду ойнойт. Комбинатордук маселелер менен жалаң гана математиктер иш жүргүзбөстөн, алар менен физиктер, химиктер, биологдор ж.б. кесиптин ээлери да иш жүргүзүшөт [3].

Кандайдыр бир обектилерди тандоо жана аларды кандайдыр бир ирээттүүлүктө жайгаштыруу адам баласынын иштөө аракетинде дайыма иш жүзүндө турмушка ашырылат. Мисалы, жаңы механизмдин моделин жасап жаткан конструкторго; айдоо талаасына тигилүүчү дан өсүмдүктөрүн керектүү ирээттүүлүктө бөлүштүрүүдө агрономго ж.б.у.с.

Комбинатордук эсептөөлөргө байыркы убакта эле кызыгуу менен көңүл бурушкан. Мындан миңдеген жылдар мурда эле байыркы Кытайда магикалык квадраттарды түзүүгө кызыгышкан. Магикалык квадратта жайланышкан сандардын суммасы мамыча боюнча да, жолчо боюнча да жана диагоналдары боюнча да барабар болот.

4	9	2
3	5	7
8	1	6

Бул магикалык квадрат биздин эрага чейинки эки миңинчи жылдагы кытай математикасына таандык. Демек, ошол убакта эле кытай математикасында сандарды кандайдыр бир иреттүүлүктө жайгаштыруу илимине кызыккандыгын көрсөтөт.

Байыркы Грецияда кесилген квадраттардан өзгөчө иреттүүлүк менен түзүлгөн фигураларды окуп үйрөнүшкөн.

Ошондой эле шашки, шахмат, тогуз коргоол, домино, карта ж.б.у.с. оюндарда ар кандай комбинацияларды түзүүгө туура келет.

Ошол мезгилдердеги улуу художник Дюрердин "Меланхолия" деген көркөм сүрөтүндө төмөндөгү магикалык квадрат берилет.

16	3	2	13

5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

Мында, чектүү көптүктөрдүн кандайдыр бир жол менен комбинацияланышы (орундаштыруусу, орун алмаштыруусу, топтоштуруусу) каралып, комбинациялардын саны эсептелинет да мындай маселелер комбинатордук маселелер деп аталат.

Комбинаториканын түрлөрү болуп эсептелген орундаштырууларды, орун алмаштырууларды жана топтоштурууларды жалпысынан биригүүлөр деп аташат. Комбинаторика көптүктөрдүн теориясы жана кортеж түшүнүгү менен тыгыз байланышта. Бул түшүнүктөр көптүктөр теориясынан кеңири берилет. Комбинатордук маселелерди чыгаруу негизинен жөнөкөй эки эрежеге: сумма жана көбөйтүндү эрежелерине негизделгенин баса көрсөтүү менен эрежелерди берүү.

Сумма эрежеси: Эгерде кандайдыр бир берилген көптүктөн x элементин n түрдүү жол менен, ал эми y элементин m түрдүү жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, жана бул тандап алуулар бир-бири менен дал келбесе, анда "x же y " элементин тандап алуунун жолу n+m ге барабар.

Башкача айтканда кандайдыр бир нерселердин чогуусунан А нерсесин n жолу менен, В нерсесин m жолу менен тандап алууга болсо анда анда А нерсесин, же В нерсесин тандап алууга n+m мүмкүнчүлүк болот.

Көбөйтүндү эрежеси: Эгерде кандайдыр бир берилген көптүктөн x элементин n түрдүү жол менен ал эми y элементин m жол менен тандап алууга мүмкүн болсо, анда (x;y) түгөйүн nm жолу менен тандап алууга болот.

Мисалы, төрт цифра 1,2,3,4 берилсе, анда биз ондук орунду ээлөөчү цифраны төрт ар түрдүү жол менен тандап алышыбыз мүмкүн. Ар бир мындай тандап алуудан кийин бирдиктердин ордуна калган үч цифралардын каалаганын коюуга болот. Демек берилген төрт цифрадан эки цифраны тандап алуу 4 x 3 = 12 жолу болот.

Эгерде көптүктүн элементтери кандайдыр бир белгилүү тартипте жайланышса, анда ал көптүк иреттелген көптүк деп аталат.

А = {a,b}көптүгү берилсин. Анын элементтери каалагандай тартипте жазылышы мүмкүн. {a,b} жана {b,a} иреттелген көптүктөрү бир гана А көптүгүн аныктайт. Башкача айтканда, көптүктүн элементтерин каалагандай жол менен иреттеп жазууга болот. Иреттелген көптүк түшүнүгү кортеж түшүнүгүнүн айрым учуру. Математикада элементтердин иреттелген жыйындысы кортеж (француз сөзүнөн алынган-салтанаттуу жүрүш) деп аталат.

Кортежде, көптүктөн айырмаланып, элементтер кайталанып калышы мүмкүн. Ошондой эле кортежде элементтердин жайланышкан иреттери да чоң мааниге ээ.

Мисалы. 211312 санынын цифраларынын кортежин жана көптүгүн аныктагыла.

Чыгаруу. Берилген цифралардын кортежи (2,1,1,3,1,2) ге барабар ал эми, кортеждин узундугу 6 , себеби кортеждин компоненттеринин саны 6.

211312 санынын цифраларынын көптүгү {2,1,3} болот да үч гана элементтен турат.

Ошондуктан, иреттелген көптүктү бардык элементтери ар түрдүү болгон кортеж катары карасак болот. Мындай кортеждердин компоненттеринин ордун алмаштырсак, жаңы кортеж алабыз. Демек, бул иреттелген көптүк үчүн да аткарылат.

X = {a,b,c} көптүгү берилсе, анда эки элементтен турган төмөндөгүдөй камтылган иреттелген көптүктөрдү түзүүгө болот: {a,b}, {a,c}, {b,a}, {b,c}, {c,a}, {c,b}. Мында үч элементтен турган X көптүгүнөн эки элементтен турган камтылган, иреттелген 6 көптүктү түзүүгө мүмкүн экендигин көрдүк.

Андан орундаштыруу, орун алмаштыруу, топтоштуруу түшүнүктөрү берилет. Бул түшүнүктөрдү берүүдө турмуштагы мисалдар менен көрсөтүү. Жыйынтыктарды окуучулардан чыгартуу.

Мисалы, орун алмаштырууларды карайлы.

Кыргыз алфавитинин отуз алты тамгасын төмөндөгү тартипте жайлаштыруу кабыл алынган:

А, Б, В, Г, Д, Е, Ж, З, И, ,Й, К, Л, М, Н, О, Ө, П,

Р, С, Т, У, Ү, Ф, Х, Ц, Ч, Ш, Щ, Ү, Ь, Ы, Э, Ю, Я.

Тамгалардын мындай тартипте жайланышында А тамгасы биринчи, Б тамгасы экинчи, ж.б ушинтип, акыркы отуз алтынчы тамга Я болот. Ушул эле тамгаларды тескери тартипте да жайлаштырууга болот: анда биринчи тамга Я, экинчиси Ю ж.б. акыркы отуз алтынчы тамга А болот. Биз отуз алты тамганы ар түрдүү тартипте жайлаштыра алабыз, бул тамгалардын орун алмаштырылышын берет.

Орун алмаштырууну каалагандай чектүү көптүктөрдүн элементтеринен түзүүгө мүмкүн. Бир элементтен турган көптүктү жалгыз бир гана түрдө ирети менен көрсөтүүгө мүмкүн: көптүктүн жалгыз элементин биринчи деп эсептөөгө туура келет.

Эки элементтен турган X = {a,b} көптүгү берилсин. Аларды ирети менен эки түрдүү жол менен орун алмаштырууга мүмкүн экендиги түшүнүктүү: {a,b} жана {b,a}.

Үч элементтен турган X = {a,b,c} көптүгү берилсе, үч элементтен турган ирееттелген көптүктөрдү төмөндөгүдөй түзүүгө болот:

{a,b,c}, {a,c,b}, {b,a,c}, {b,c,a}, {c,a,b}, {c,b,a}.

Мында берилген X көптүгүнүн ордун гана алмаштырып түздүк, түзүлгөн ирееттелген көптүктөр X көптүгү канча элементтен турса, ошончо элементтен турат.

Эгерде каалагандай $X = \{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ чектүү көптүгү берилсе жана көптүктөгү элементтердин саны n ге барабар болсо, бул көптүктүн элементтеринин ордун алмаштырып ирееттелген көптүктөрдү түзүүгө болот, алардын ар биринин элементтеринин саны n ге барабар, мында ирееттелген көптүктөрдүн элементтери ээлеген бири-бири менен ээлеген орду менен гана айырмаланышат.

n элементтен турган X чектүү көптүгүнөн түзүлгөн ирееттелген бардык n элементтүү көптүктөр n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулар деп аталат.

n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны P_n деп белгиленет.

Жогорудагы орун алмаштыруунун аныктамасынын негизинде орун алмаштырууну n элементтен n ден түзүлгөн орундаштыруу экендигин көрүүгө болот. Демек, орун алмаштырууларды орундаштыруулардын айрым учуру катарында кароого болот.

$$P_n = A_n^n = n(n-1)(n-2)\ldots 2\ 1 = n!$$

n элементтен түзүлгөн орун алмаштыруулардын саны $P_n = n!$ (4) формуласы менен эсептелинет.

Орун алмаштырууну кортеж түшүнүгү аркылуу да алууга болот. Эгерде каалагандай n элементи бар чектүү көптүк берилсе, элементтеринин узундугу n болгон кортежди түзө алабыз. Бул кортеждердин ордун улам алмаштырсак, улам жаңы кортежди алабыз. Алар бири-бири менен компоненттеринин жайланышкан орду менен гана айырмалануу менен, ар түрдүү кортеждер болушат. Алардын ар биринин узундуктары n ге барабар. Мында кортеждердин көптүгү орун алмаштырууларды түзөт.

Комбинаторикада каалагандай чектүү n элементтен турган X көптүгүнөн түзүлгөн m элементүү ($0 \le m \le n$) бардык камтылган, иреттелген көптүктөрдү n элементтен m ден түзүлгөн орундаштыруулар деп аташат.

n элементтен m ден орундаштыруунун санын A_n^m деп белгиленет.

Орундаштыруулар, топтоштуруулар түшүнүктөрү берилет.

Окуучуларга өз алдынча иштегенге деңгээлдеген көнүгүүлөрдү сунуштоо.

Жөнөкөй деңгээлдеги көнүгүүлөрдү аткарууда даяр формула боюнча эсептөөлөр жүргүзүлүү менен формулаларды эске тутууга шарт түзүлөт.

1) Эгерде а) X ={a}; б) X = {6;7}; в) X = {m;n;p} болсо, X көптүгүнүн элементтеринен бардык мүмкүн болгон орун алмаштырууларды түзгүлө.

2) Формуланы далилдегиле; $\frac{(n+2)!}{n!} = (n+1)(n+2)$.

3) Эсептегиле: 5! + 4!.

4) Эсептегиле: $\frac{6!-3!}{119}$.

5) Бөлчөктү кыскарткыла: $\frac{(n-1)!}{n!}$.

6) Бөлчөктү кыскарткыла: $\frac{n!}{(n-2)!}$.

7) Амалды аткаргыла: $\frac{1}{(n-2)!} + \frac{1}{(n-1)!}$.

8) 8 окуучудан канча жол менен тизмени түзүүгө болот?

9) 5 конокту 5 отургучка канча жол менен отургузууга болот?

10) $A_n^{n-1} = n!$ экенин далилдегиле.

11) Ар түрдүү 3 кызматка 8 кишиден 3 кишини канча түрдүү жол менен тандап алууга болот?

12) Класстагы 12 партага 2 окуучуну канча түрдө отургузууга болот?

13) Ар түрдүү канча буюмдан ар биринде эки элементтен болгон 12 орундаштырууну түзүүгө болот?

14) M = {1;2;3} көптүгүнүн бардык камтылган көптүктөрүн түзгүлө.

15) Эсептегиле: C_7^2 .

Татаалыраак деңгээлиндеги, ой-жүгүртүүнү талап кылуучу төмөндөгү көнүгүүлөрдү окууучуларга сунуш кылса болот.

1) 2, 2, 2, 3, 3, 4 цифраларынан канча ар түрдүү алты орундуу сандарды түзүүгө болот?

Чыгаруу: Берилген 6 цифрадан кандайдыр бир алты орундуу санды түзөлү да цифралардын ордун мүмкүн болушунча алмаштыралы. Мында орун алмаштыруулардын саны 6! болот. Бирдей цифралардын ордун алмаштырганда пайда болгон сандар бирдей болушат. Берилген 2, 2, 2, 3, 3, 4 цифраларда 2 цифрасы 3 жолу, 3 цифрасы 2 жолу кайталанып жаткандыктан, ар бир санда мындай орун алмаштыруулардын саны $3! \cdot 2!$ болот. Демек кайталануучу элементтери бар $\frac{6!}{3! \cdot 2!} = 60$ ар түрдүү алты орундуу сандарды түзүүгө болот.

2) 4, 4, 5, 6, 7 цифраларынан канча төрт орундуу ар түрдүү сандарды түзүүгө болот?

Чыгаруу: Берилген 4, 4, 5, 6, 7 цифраларынан түзүлгөн төрт орундуу сандарда 4 цифрасы бирөө же экөө болууга тийиш. 4, 5, 6, 7 цифраларынын мүмкүн болгон орун алмаштырууларынан жана 4 , 4, 5, 6 менен 4, 4, 6, 7 цифраларынын мүмкүн болгон орун алмаштырууларынан түзүлөт. Демек изделүүчү сан

$$N = 4! + \frac{4!}{2!} + \frac{4!}{2!} = 48.$$

Колдонулган адабияттардын тизмеси:

1.Математика боюнча жалпы орто мектептин окуу китептери жана окуу программалары (5-11 класстар.)

2.КР 2018-2040—жылдарга карата туруктуу өнүктүрүүнүн Улуттук Стратегиясы.- 2018 ж. 31-окт., ПЖ №221.—17-б.

3.Төрөгелдиева К.М. Математиканы окутуу теориясы жана методикасы: (2 – бөлүк).-Б.: 2014.-316б.

Рецензент: ф-м.и.к., проф.м.а. Асанова Ж.К.